コンパクト開位相と写像空間の位相

arata mizuki

2020 年 11 月 23 日

目次

0 はじめに

0.1 この文書の目的と、採用する流儀について

この文書では、位相空間の間の連続写像のなす集合 $C(X, Y)$ に入る位相構造をいくつか取り上げる。このような位相としては**コンパクト開位相**が代表的だが、それ以外の位相も取り扱う。また、直積集合の位相としては通常の直積位相以外のものも扱う。

取り上げる定理の方向性としては、圏論を意識して、写像のなす空間の圏論的性質を語るために使いたい定理をいくつか用意する。

ハウスドルフ性はなるべく仮定しない。他の文献で「局所コンパクトハウスドルフ」(Bourbaki では「局所コンパクト」) となっているような箇所も、なるべく別の（弱い）条件を使用することがある。本当は core compact などを使って語るのがベストなのだろうが、筆者の勉強不足でそこまでは至っていない。

位相空間の最低限の知識を仮定した上でなるべく自己完結的に書こうと思っているが、現在、一部の定理の証明は参考文献に委ねている。

0.2 記法について

写像 $f\colon X \to Y$ に関する集合 $A \subset X$ の順像を $f[A]$, 集合 $B \subset Y$ の逆像を $f^{-1}[B]$ で表す。

位相空間 X の開集合系を $\mathcal{O}(X)$ で表す。

位相空間 X の部分集合 A の内部（開核）を $\mathrm{Int}(A)$ で表し、閉包を $\overline{A}$ で表す。

位相空間 X から Y への連続写像の全体を $C(X,Y)$ で表す：

$$C(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ は連続}\}.$$

1 局所コンパクト性

定義 1.1. 任意の点に対してコンパクトな近傍が少なくとも一つ存在するような位相空間のことを、**局所コンパクト [弱]** (locally compact) であるという。

定義 1.2. 任意の点に対して、コンパクトな近傍の全体が基本近傍系となるような位相空間のことを、**局所コンパクト [強]** であるという。つまり、各点 x の任意の近傍が点 x のコンパクトな近傍を包むような空間のことである。

命題 1.3 (内田 [3, 問 24.1])**.** 位相空間 X について、各点が相対コンパクトな開近傍を持つならば各点はコンパクトな近傍を持つ。

ハウスドルフ空間においては逆が成り立つ。つまり、各点がコンパクトな近傍を持つならば各点は相対コンパクトな開近傍を持つ。

Proof. 前半は自明である。

ハウスドルフ空間 X において、各点がコンパクトな近傍を持つとする。つまり、任意の点 $x \in X$ に対してコンパクト集合 K と開集合 U が存在し、$x \in U \subset K$ となっている。ハウスドルフ性より、K は閉集合である。$U \subset K$ で K は閉なので、$\overline{U} \subset K$ である。$\overline{U}$ はコンパクト空間の閉集合なので、コンパクトである。つまり U は相対コンパクトな x の開近傍である。 □

定理 1.4 (Kelley [2, Theorem 5.17], 内田 [3, 定理 24.1])**.** 局所コンパクト [弱] ハウスドルフ空間は局所コンパクト [強] である。

定理 1.4 の証明はここでは省略する（余力があれば書きたい)。

定理 1.5 (Kelley [2, Theorem 5.17])**.** 局所コンパクト [弱] 正則空間は局所コンパクト [強] である。

TODO: 証明

注 1.6. 「局所コンパクト [弱]」「局所コンパクト [強]」はここだけの名前である。概念としては

- gn.general topology - On the definition of locally compact for non-Hausdorff spaces - MathOverflow[*1]
- locally compact topological space in nLab[*2]

を参考にした。

Kelley [2] や内田 [3] では、局所コンパクトの定義に定義 1.1 を採用している。

一方、Bourbaki [1] では、「局所コンパクト」にハウスドルフ性も課しているので、2 種類の定義は同値である。

定理 1.7. 局所コンパクト [弱] 空間 X, Y の直積 $X \times Y$ も局所コンパクト [弱] である。

Proof. $X \times Y$ の点を任意にとって (x, y) とおく。X は局所コンパクト [弱] なので x のコンパクトな近傍 K が取れる。同様に Y は局所コンパクト [弱] なので y のコンパクトな近傍 L が取れる。$K \times L$ は (x, y) のコンパクトな近傍である。 □

定理 1.8. 局所コンパクト [強] 空間 X, Y の直積 $X \times Y$ も局所コンパクト [強] である。

Proof. $X \times Y$ の点を任意にとって (x, y) とおく。(x, y) の開近傍を任意にとって W とおく。直積位相の構成より、x の開近傍 U と y の開近傍 V であって $U \times V \subset W$ となるものが存在する。X は局所コンパクト [強] なので、U に包まれるような x のコンパクトな近傍 K が取れる。同様に Y は局所コンパクト [強] なので、V に包まれるような y のコンパクトな近傍 L が取れる。$K \times L$ は W に包まれるような (x, y) のコンパクトな近傍である。 □

局所コンパクト性を満たさない空間の例を挙げておく。

定理 1.9. 位相空間 X の無限直積 $Y = \prod_{i \in \mathbf{N}} X$ が局所コンパクト [弱] であれば、X はコンパクトである。

Proof. X が空集合の場合は自明である。そうでない場合に Y の点をひとつ取り、そのコンパクトな近傍 K を考える。このとき、ある開集合 U について $y \in U \subset K$ となる。

連続写像はコンパクト集合をコンパクト集合に写すので、射影 $p_i \colon Y \to X$ による像 $K_i := p_i[K]$ は全てコンパクトである。

一方、射影 p_i は開写像なので U の像 $U_i := p_i[U]$ も開集合である。無限直積に関する直積位相の定義より、有限個の i を除いて $U_i = X$ である。$U_i = X$ となるような i をひとつ取ると、$X = U_i \subset K_i$ より $K_i = X$ となり、X はコンパクトである。 □

系 1.10. 数直線の無限直積

$$\prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$$

は局所コンパクト [弱] ではない。

命題 1.11. $\mathbf{Q}$ に $\mathbf{R}$ の相対位相を入れるとき、$\mathbf{Q}$ は局所コンパクト [弱] ではない。

Proof. $0 \in \mathbf{Q}$ がコンパクトな近傍 K を持ったとする。つまり、適当な開集合 U について $0 \in U \subset K$ となる

[*1] https://mathoverflow.net/questions/263076/on-the-definition-of-locally-compact-for-non-hausdorff-spaces/263101
[*2] https://ncatlab.org/nlab/show/locally+compact+topological+space

と仮定する。$\mathbf{R}$ の開集合の定義より、ある $\varepsilon > 0$ について、$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbf{Q} \subset U$ となる。無理数は $\mathbf{R}$ で稠密なので、$0 < \alpha < \varepsilon$ となる無理数 α を 1 つ選ぶことができる。すると、

$$\{(-\infty, \alpha/2) \cap \mathbf{Q}\} \cup \{((1-1/2^n)\alpha, (1-1/2^{n+1})\alpha) \cap \mathbf{Q} \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{(\alpha, \infty) \cap \mathbf{Q}\}$$

は K の開被覆であるが、有限部分被覆を持たない。これは K のコンパクト性に反する。 □

注 1.12. これらの反例は

- locally compact topological space in nLab[*3]

を参考にした。無限直積に関しては [2, Theorem 5.19] もあったが、直積が空の場合を考慮していない気がしたので、より具体的な nLab の書き方を採用した。

2 コンパクト開位相の定義

位相空間 X, Y を固定し、$A \subset X$, $B \subset Y$ とする。この時、$W(A, B)$ を次のように定める：

$$W(A, B) := \{f \in C(X, Y) \mid f[A] \subset B\}$$

$K \subset X$ がコンパクト、$U \subset Y$ が開であるような $W(K, U)$ で生成される $C(X, Y)$ の位相を**コンパクト開位相** (compact-open topology) と呼ぶ。$C(X, Y)$ の部分集合にも $C(X, Y)$ の部分空間としての位相を入れる。以後、$C(X, Y)$ を位相空間として扱う場合は、特に断らない限りコンパクト開位相を入れる。

W について成り立つ式をいくつか挙げておく：

- $U \subset V$ ならば $W(K, U) \subset W(K, V)$、特に $W(K, U_1) \cup W(K, U_2) \subset W(K, U_1 \cup U_2)$
- $K \subset L$ ならば $W(L, U) \subset W(K, U)$、特に $W(K_1, U) \cup W(K_2, U) \subset W(K_1 \cap K_2, U)$
- $W(K, U_1) \cap W(K, U_2) = W(K, U_1 \cap U_2)$
- $W(K_1, U) \cap W(K_2, U) = W(K_1 \cup K_2, U)$

命題 2.1 (内田 [3, 問 30.1])**.** X の任意の部分集合 A および Y の任意の閉集合 B に対して、$W(A, B)$ は $C(X, Y)$ の上のコンパクト開位相に関して閉集合である。

Proof. $C(X, Y) \setminus W(A, B)$ が開集合であることを示す。$f \in C(X, Y) \setminus W(A, B)$ という条件を言い換えると、ある $x \in A$ について $f(x) \notin B$ となること、つまりその x について $f(x) \in Y \setminus B$ を意味する。

$$\begin{aligned} C(X, Y) \setminus W(A, B) &= \{f \in C(X, Y) \mid \exists x \in A.\ f(x) \in Y \setminus B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} \{f \in C(X, Y) \mid f(x) \in Y \setminus B\} \\ &= \bigcup_{x \in A} W(\{x\}, Y \setminus B). \end{aligned}$$

集合 $\{x\}$ はコンパクト、$Y \setminus B$ は開集合なので、$W(\{x\}, Y \setminus B)$ は開集合である。その和集合も開集合である。 □

[*3] https://ncatlab.org/nlab/show/locally+compact+topological+space

部分集合 $H \subset C(X,Y)$ に対するコンパクト開位相は、$C(X,Y)$ のコンパクト開位相の相対位相として定義する。この位相は、$W_H(A,B) := \{f \in H \mid f[A] \subset B\}$ とおいた時に、X のコンパクト集合 K と Y の開集合 U についての $W_H(K,U)$ で生成される。

3 コンパクト開位相の位相的性質

定理 3.1 (Kelley [2, Theorem 7.4], 内田 [3, 定理 30.2 (1)]). *Y がハウスドルフならば $C(X,Y)$ もハウスドルフである。*

Proof. $f, g \in C(X,Y)$, $f \neq g$ の時に f と g を開集合で分離したい。$f \neq g$ より、ある $x_0 \in X$ について $f(x_0) \neq g(x_0)$ となる。Y はハウスドルフなので、適当な開集合 $U, V \subset Y$ について

$$U \cap V = \emptyset, \quad f(x_0) \in U, \quad g(x_0) \in V$$

とできる。$W(\{x_0\}, U)$ と $W(\{x_0\}, V)$ はそれぞれ $C(X,Y)$ の開集合である。それぞれ f, g の開近傍となる。さらに、U と V は交わらないので、$W(\{x_0\}, U)$ と $W(\{x_0\}, V)$ も交わらない。よって、f と g は分離される。$C(X,Y)$ はハウスドルフである。 □

定理 3.2 (Kelley [2, Theorem 7.4], 内田 [3, 定理 30.2 (2)]). *Y が正則空間[*4]であれば、$C(X,Y)$ も正則である。*

注 3.3. X と Y の両方が局所コンパクトであっても、一般には $C(X,Y)$ は局所コンパクトとはならない。反例は、離散位相を入れた $\mathbf{N}$ を X とし、$Y = \mathbf{R}$ としたものである（系 1.10)。

4 コンパクト開位相と直積位相との関係

4.1 評価写像との関係

補題 4.1 (Kelley [2, Theorem 5.12], 内田 [3, 問 23.1]). *位相空間 X, Y とそれぞれのコンパクト部分集合 $K \subset X$, $L \subset Y$ が与えられたとする。$X \times Y$ の開集合 W について $K \times L \subset W$ が成り立つならば、X の開集合 U および Y の開集合 V であって*

$$K \subset U, \quad L \subset V, \quad U \times V \subset W$$

を満たすものが存在する。

Proof. まず「K が一点の場合」を示し、それを使って K が一般の場合を証明する。

■K が一点の場合 $K = \{x_0\}$ とおく。それぞれの $y \in L$ に対して、積位相の構成より、$x_0 \in U'$, $y \in V'$, $U' \times V' \subset W$ となる開集合 U', V' が存在する。よって、

$$\mathcal{I} = \{(U', V') \in \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y) \mid x \in U', U' \times V' \subset W\}$$

とおいたとき、

$$L \subset \bigcup_{(U',V') \in \mathcal{I}} V'$$

[*4] 閉集合と 1 点が分離できること。

となる。L はコンパクトなので、有限個の $\{(U'_1, V'_1), \dots, (U'_n, V'_n)\} \subset \mathcal{I}$ によって

$$L \subset \bigcup_{1 \le j \le n} V'_j$$

とできる。

$$U := U'_1 \cap \cdots \cap U'_n, \quad V := V'_1 \cup \cdots \cup V'_n$$

とおくと U, V はそれぞれ開集合で、$x \in U$, $L \subset V$ である。あとは $U \times V \subset W$ を示せばよい。

$$U \times V = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U'_i\right) \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} V'_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{n} U'_i \times V'_j$$

ここで、各 j について

$$\bigcap_{i=1}^{n} U'_i \times V'_j \subset U'_j \times V'_j \subset W$$

なので $U \times V \subset W$ である。

■K が一般の場合　それぞれの $x \in K$ に対して、「K が一点の場合」より、$x \in U'', L \subset V'', U'' \times V'' \subset W$ となる X の開集合 U'' および Y の開集合 V'' が存在する。よって、

$$\mathcal{I} = \{(U'', V'') \in \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y) \mid L \subset V'', U'' \times V'' \subset W\}$$

とおいたとき、

$$K \subset \bigcup_{(U'', V'') \in \mathcal{I}} U''$$

となる。K はコンパクトなので、有限個の $(U''_1, V''_1), \dots, (U''_m, V''_m) \in \mathcal{I}$ によって

$$K \subset \bigcup_{1 \le i \le m} U''_i$$

とできる。

$$U := U''_1 \cup \cdots \cup U''_m, \quad V := V''_1 \cap \cdots \cap V''_m$$

とおくと U, V はそれぞれ開集合で、$K \subset U$, $L \subset V$ である。あとは $U \times V \subset W$ を示せばよい。

$$U \times V = \left(\bigcup_{i=1}^{m} U''_i\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{m} V''_j\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{m} U''_i \times V''_j$$

ここで、各 i について

$$\bigcap_{j=1}^{m} U''_i \times V''_j \subset U''_i \times V''_i \subset W$$

なので $U \times V \subset W$ である。 □

命題 4.2 (内田 [3, 定理 30.1 (1)]). X と Y を位相空間とし、$H \subset C(X, Y)$ とする。H 上のコンパクト開位相は、

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{eval}_H\colon & H \times X & \to & Y \\ & (f, x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

を連続にするような H のどんな位相よりも小さい。つまり、eval_H がより連続になりにくい。

Proof. H の位相 $\mathcal{H}$ について eval_H が連続であると仮定する。H のコンパクト開位相における開集合が $\mathcal{H}$ でも開集合であることを示せば良い。そのためには X のコンパクト集合 K と Y の開集合 U について $W_H(K,U) := W(K,U) \cap H$ が $\mathcal{H}$ についての開集合であることを示せば十分である。

$f_0 \in W_H(K,U)$ を任意に取る。$\{f_0\} \times K \subset \mathrm{eval}_H^{-1}[U]$ であり、$\mathrm{eval}_H^{-1}[U]$ は $(H,\mathcal{H}) \times X$ の開集合である。よって、補題 4.1 より、$(H,\mathcal{H})$ における f_0 の開近傍 N と X の開集合 V であって

$$K \subset V, \quad N \times V \subset \mathrm{eval}_H^{-1}[U]$$

となるものが存在する。

あとは $N \subset W_H(K,U)$ を言いたいが、$f \in N$ について

$$f[K] = \mathrm{eval}_H[\{f\} \times K] \subset \mathrm{eval}_H[N \times V] \subset U$$

なので $f \in W_H(K,U)$ である。よって $N \subset W_H(K,U)$ であり、N は f_0 の $W_H(K,U)$ における開近傍である。

f_0 は任意だったので、$W_H(K,U)$ は $\mathcal{H}$ についての開集合である。 □

注 4.3. H に離散位相を入れれば eval_H は当然*5連続になる。H の自然な位相は eval_H がなるべく連続になりにくいもの（位相として小さいもの）であってほしい。

定理 4.4 (Kelley [2, Theorem 7.5])**.** X と Y を位相空間とし、H を $C(X,Y)$ の部分集合とする。H の位相 $\mathcal{H}$ は任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{eval}|_{H\times K}: & H \times K & \to & Y \\ & (f,x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

を連続とすると仮定する。このとき、H 上のコンパクト開位相は $\mathcal{H}$ より小さい。

さらに、X がハウスドルフ空間のとき、H にコンパクト開位相を入れたものは X の任意のコンパクト集合 K について

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{eval}|_{H\times K}: & H \times K & \to & Y \\ & (f,x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

を連続とする。

Proof.

■前半　X のコンパクトな部分集合 K と Y の開集合 U について $W_H(K,U)$ が位相 $\mathcal{H}$ について開集合であることを示せば良い。$f_0 \in W_H(K,U)$ を取ると、$\{f_0\} \times K \subset (\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U]$ である。$\{f_0\} \times K$ はコンパクトなので、次を満たすような $\mathcal{H}$ の意味での $\{f_0\}$ の開近傍 N が存在する：

$$N \times K \subset (\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U] \subset \mathrm{eval}_H^{-1}[U]$$

この N について $N[K] = \mathrm{eval}_H[N \times K] \subset U$ なので、$N \subset W_H(K,U)$ である。よって、f_0 は位相 $\mathcal{H}$ について $W_H(K,U)$ の内点であり、$W_H(K,U)$ は $\mathcal{H}$ の開集合である。

---

*5 H に離散位相を入れ、開集合 $U \subset Y$ に対し $\mathrm{eval}_H^{-1}[U]$ を

$$\mathrm{eval}_H^{-1}[U] = \bigcup_{f\in H} (\{f\} \times f^{-1}[U])$$

と表示する。$f \in H$ について $\{f\}$ は H の開集合で $f^{-1}[U]$ は X の開集合なので $\{f\} \times f^{-1}[U]$ は $H \times X$ の開集合、よってその和集合である $\mathrm{eval}_H^{-1}[U]$ も $H \times X$ の開集合である。

■**後半**　U を Y の開集合とする。$(\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U]$ が $H\times K$ の開集合であることを示したい。

$(f_0, x_0) \in (\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U]$ を任意に取る。すなわち、$f_0 \in H$, $x_0 \in K$ かつ $f_0(x_0) \in U$ である。$f_0|_K$ は連続なので、$(f_0|_K)^{-1}[U]$ は K の開集合である。K はコンパクトハウスドルフで、特に局所コンパクト [強] なので、$(f_0|_K)^{-1}[U]$ に包まれるような x_0 のコンパクトな近傍 M が存在する。

$$x_0 \in M \subset (f_0|_K)^{-1}[U] \subset K$$

$W_H(M,U)\times M$ は $H\times K$ における (f_0, x_0) の近傍で、$(\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U]$ に包まれる。よって $(\mathrm{eval}|_{H\times K})^{-1}[U]$ は開集合であり、$\mathrm{eval}|_{H\times K}$ は連続である。 □

4.2　直積との随伴

定理 4.5 (Bourbaki [1, p302, Theorem 3])**.** X, Y, Z を位相空間とする。写像 $f\colon X\times Y\to Z$ が連続の時、対応

$$\begin{array}{cccc} f^\sharp\colon & X & \to & C(Y,Z) \\ & x & \mapsto & (y\mapsto f(x,y)) \end{array}$$

は well-defined な連続写像を定める。

Yが局所コンパクト [強] の場合は、逆が成り立つ。つまり、写像 $g\colon X\to C(Y,Z)$ が連続ならば写像

$$\begin{array}{cccc} g^\flat\colon & X\times Y & \to & Z \\ & (x,y) & \mapsto & g(x)(y) \end{array}$$

も連続である。

Proof.
■**前半**　まず、$f^\sharp$ が写像として well-defined であること、つまりそれぞれの $x\in X$ に対して $f^\sharp(x)$ が連続写像であることは明らかである。

以後、$f^\sharp$ の連続性を確認する。そのためには、任意にとったコンパクト集合 $K\subset Y$と開集合 $U\subset Z$ について $V := (f^\sharp)^{-1}[W(K,U)]$ が開集合であることを示せば良い。

$x_0 \in V$を任意にとって固定する。$x_0\in V = (f^\sharp)^{-1}[W(K,U)]$ より、$f^\sharp(x_0)[K] = f[\{x_0\}\times K] \subset U$ である。つまり $\{x_0\}\times K\subset f^{-1}[U]$ である。f は連続なので $f^{-1}[U]$ は開集合である。$\{x_0\}\times K$ はコンパクトなので、補題 4.1 より x_0 の開近傍 U' と K の開近傍 V' であって $U'\times V'\subset f^{-1}[U]$ となるものが存在する。

$$f[U'\times V'] \subset U$$

$U'\subset V$を言いたい。そのためには $f^\sharp[U']\subset W(K,U)$ を言えばよい。$h\in f^\sharp[U']$ とすると

$$h[K]\subset f[U'\times K]\subset f[U'\times V']\subset U$$

である。よって $h\in W(K,U)$ で、h は任意なので $f^\sharp[U']\subset W(K,U)$ である。

これで x_0 が Vの内点である（$x_0\in U'\subset V$）ことがわかった。よって Vは開集合である。

■**後半**　g が連続、Y が局所コンパクト[強] である時に $g^\flat$ が連続であることを示したい。任意の $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ に対して、$g^\flat(x_0, y_0) \in Z$ の開近傍の逆像が $(x_0, y_0) \in X \times Y$ の開近傍であることを示す。

U を $g^\flat(x_0, y_0) \in Z$ の開近傍とする。x_0 の開近傍 V と y_0 の近傍 T であって $g^\flat[V \times T] \subset U$ となるものが存在することを示す（$V \times T$ は (x_0, y_0) の近傍である)。

$g(x_0)^{-1}[U]$ は Y の開集合であり、y_0 の開近傍である。Y は局所コンパクト[強] なので、y_0 のコンパクトな近傍 T であって $T \subset g(x_0)^{-1}[U]$ となるものが存在する。この T について

$$g(x_0)[T] \subset U$$

が成り立つ。よって $g(x_0) \in W(T, U)$ で、$x_0 \in g^{-1}[W(T, U)]$ である。一方、g は連続なので、

$$V := g^{-1}[W(T, U)] = \{x \in X \mid g(x) \in W(T, U)\}$$

は X の開集合で、x_0 の開近傍である。この V は $g^\flat[V \times T] \subset U$ を満たす。 □

系 4.6 (内田 [3, 定理 30.1 (2)])**.** 位相空間 Y と位相空間 Z に対し、評価写像

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{eval}\colon & C(Y, Z) \times Y & \to & Z \\ & (f, x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

を考える。$C(Y, Z)$ にコンパクト開位相を入れる時、Y が局所コンパクト[強] 空間であれば eval は連続である。

Proof. $X = C(Y, Z)$ として定理 4.5 の「逆」を $g = \mathrm{id}\colon C(Y, Z) \to C(Y, Z)$ に対して適用すればよい。 □

系 4.7 (Bourbaki [1, p303, Corollary 2])**.** X と Y がそれぞれ局所コンパクト[強] 空間の時、対応

$$\begin{array}{rccc} p\colon & C(X \times Y, Z) & \to & C(X, C(Y, Z)) \\ & f & \mapsto & (x \mapsto (y \mapsto f(x, y))) \\ & ((x, y) \mapsto g(x)(y)) & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

は同相写像を定める。

Proof. Y が局所コンパクト[強] 空間の時に p が well-defined な全単射であることは定理 4.5 の帰結である。p と p^{-1} の連続性を確認する。

■p **について**　X と Y がそれぞれ局所コンパクト[強] なので $X \times Y$ も局所コンパクト[強] である（定理 1.8)。これを使うと、系 4.6 より、

$$\mathrm{eval}\colon C(X \times Y, Z) \times (X \times Y) \to Z; \quad (f, (x, y)) \mapsto f(x, y)$$

は連続である。位相空間の直積 $\times$ は結合的なので、

$$(C(X \times Y, Z) \times X) \times Y \to Z; \quad ((f, x), y) \mapsto f(x, y)$$

も連続である。定理 4.5 より

$$C(X \times Y, Z) \times X \to C(Y, Z); \quad (f, x) \mapsto (y \mapsto f(x, y))$$

も連続、同じように

$$p\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z)); \quad f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y)))$$

も連続写像である。

■**逆対応** p^{-1} **について**　X と Y がそれぞれ局所コンパクト [強] なので、系 4.6 より

$$(C(X,C(Y,Z))\times X)\times Y \xrightarrow{\mathrm{eval}\times\mathrm{id}} C(Y,Z)\times Y \xrightarrow{\mathrm{eval}} Z;\quad ((g,x),y)\mapsto g(x)(y)$$

は連続写像である。直積の結合性より

$$C(X,C(Y,Z))\times(X\times Y)\to Z;\quad (g,(x,y))\mapsto g(x)(y)$$

も連続である。定理 4.5 より

$$C(X,C(Y,Z))\to C(X\times Y,Z);\quad g\mapsto (x,y)\mapsto g(x)(y)$$

も連続写像である。 □

（TODO: X についての局所コンパクト性の仮定は外せるか？）

補題 4.8. Y を局所コンパクト [強] 空間、K を Y のコンパクト集合、U を K の開近傍とする。このとき、K のコンパクトな開近傍であって U に包まれるもの L が存在する。

Proof. Y は局所コンパクト [強] なので、それぞれの $x\in K$ に対してコンパクトな近傍であって U に包まれるもの M が存在する。つまり、

$$\mathcal{M} := \{M\subset U \mid \exists x\in K.\ M \text{ は } x \text{ のコンパクトな近傍}\}$$

は K を被覆する。K はコンパクトなので有限個の $M_1,\dots,M_n\in\mathcal{M}$ によって K を被覆できる。その和集合 $M' := M_1\cup\cdots\cup M_n$ を考えると、M' は K のコンパクトな開近傍で、U に包まれる。 □

定理 4.9 (内田 [3, 定理 30.3], Bourbaki [1, p304, Proposition 9])**.** 位相空間 X, Z と局所コンパクト [強] 空間 Y に対し、写像の合成

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & C(Y,Z)\times C(X,Y) & \to & C(X,Z) \\ & (u,v) & \mapsto & u\circ v \end{array}$$

は連続である。

Proof. X のコンパクト集合 K および Z の開集合 U に対し、$\mu^{-1}[W(K,U)]$ が $C(Y,Z)\times C(X,Y)$ の開集合であることを示したい。

$(u_0,v_0)\in\mu^{-1}[W(K,U)]$ をとる。[注：$\mu(u_0,v_0)=u_0\circ v_0\in W(K,U)$、つまり $u_0[v_0[K]]\subset U$ である。] $v_0[K]$ は Y のコンパクト集合であって、$v_0[K]\subset u_0^{-1}[U]$ である。補題 4.8 より、$v_0[K]$ のコンパクトな近傍であって $u_0^{-1}[U]$ に包まれるもの L が存在する。

$$V := W(K,\mathrm{Int}(L)) = \{v\in C(X,Y)\mid v[K]\subset\mathrm{Int}(L)\}$$

とおくと V は v_0 の近傍であり、

$$W := W(L,U) = \{u\in C(Y,Z)\mid u[L]\subset U\}$$

とおくと W は u_0 の近傍である。$(u,v)\in V\times W$ であれば $u[v[K]]\subset U$ である。よって、$V\times W\subset\mu^{-1}[W(K,U)]$ である。 □

なお、X と Yの両方が局所コンパクト[強] であることを仮定して良いなら、定理 4.9 は定理 4.5 の系として以下のように証明できる。

Another proof of 4.9. X と Yの局所コンパクト[強] 性より

$$C(Y,Z) \times (C(X,Y) \times X) \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{eval}} C(Y,Z) \times Y \xrightarrow{\mathrm{eval}} Z; \quad (u,(v,x)) \mapsto u(v(x))$$

は連続である。直積の結合性より

$$(C(Y,Z) \times C(X,Y)) \times X \to Z; \quad ((u,v),x) \mapsto u(v(x))$$

は連続、定理 4.5 より

$$\mu\colon C(Y,Z) \times C(X,Y) \to C(X,Z); \quad (u,v) \mapsto (x \mapsto u(v(x)))$$

は連続である。 □

5 各点収束位相

5.1 各点収束位相

$C(X,Y)$ のコンパクト開位相は X のコンパクト集合 K と Yの開集合 U に関する $W(K,U)$ によって生成される位相だった。これに対し、X の点 x と Yの開集合 U に関する $W(\{x\},U)$ によって生成される位相を**各点収束位相** (topology of pointwise convergence, point-open topology) と呼ぶ。ここだけの記法で、$C(X,Y)$ に各点収束位相を与えた空間を $C_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ で表すことにする。

準開基を「X の有限集合 $F = \{x_1,\dots,x_n\}$ と Yの開集合 U に関する $W(F,U)$」としても同じことである。

$x \in X$ について $\mathrm{eval}_x\colon C(X,Y) \to Y$を $f \mapsto f(x)$ で定義すると、

$$W(\{x\},U) = \mathrm{eval}_x^{-1}[U]$$

である。すなわち、写像の族 $\{\mathrm{eval}_x\colon C(X,Y) \to Y\}$ に関する $C(X,Y)$ の始位相が各点収束位相である。

定義からわかるように、$C(X,Y)$ の各点収束位相は X の位相には依存しない。

定理 5.1. カリー化された関数合成

$$\begin{array}{rccc} L^X_{Y,Z}\colon & C(Y,Z) & \to & C(C(X,Y),C(X,Z)) \\ & f & \mapsto & (g \mapsto f \circ g) \end{array}$$

は各点収束位相に関して連続である。

Proof. $g_0 \in C(X,Y)$ と開集合 $U \subset C_{\mathrm{pt}}(X,Z)$ を任意に選ぶ。$V := (L^X_{Y,Z})^{-1}[W(\{g_0\},U)]$ が開集合であることを示せばよい。以下、$f \in V$をとり、これが Vの内点であることを示す。

Vを書き下すと

$$\begin{aligned} V &= (L^X_{Y,Z})^{-1}[W(\{g_0\},U)] \\ &= \{f \in C(Y,Z) \mid L^X_{Y,Z}(f) \in W(\{g_0\},U)\} \\ &= \{f \in C(Y,Z) \mid L^X_{Y,Z}(f)[\{g_0\}] \subset U\} \\ &= \{f \in C(Y,Z) \mid f \circ g_0 \in U\} \end{aligned}$$

となるので、$f \in V$ならば $f \circ g_0 \in U$ である。

U は各点収束位相に関する $C(X,Z)$ の開集合なので、ある $W(\{x_1\},T_1),\dots,W(\{x_n\},T_n)$ によって

$$f \circ g_0 \in W(\{x_1\},T_1) \cap \cdots \cap W(\{x_n\},T_n) \subset U$$

とできる（ただし $x_i \in X,\ T_i \subset Z$)。この時

$$f \in W(\{g_0(x_1)\},T_1) \cap \cdots \cap W(\{g_0(x_n)\},T_n) \subset C(X,Z)$$

である。あとは $W(\{g_0(x_1)\},T_1) \cap \cdots \cap W(\{g_0(x_n)\},T_n)$ が Vの部分集合であることを示せばよい。

実際、

$$f' \in W(\{g_0(x_1)\},T_1) \cap \cdots \cap W(\{g_0(x_n)\},T_n)$$

を任意に取ると、

$$f' \circ g_0 \in W(\{x_1\},T_1) \cap \cdots \cap W(\{x_n\},T_n) \subset U$$

である。よって、$f' \in V$である。

これで f が Vの内点であることがわかり、f は任意だったので Vが開集合であることがわかる。よって、各点収束位相に関して $L^X_{Y,Z}$ は連続である。 □

命題 5.2. 各点収束位相に関する開集合はコンパクト開位相に関しても開集合である。つまり、各点収束位相はコンパクト開位相よりも小さい位相である。

Proof. 一点 $\{x\}$ はコンパクトなので、各点収束位相の開基 $W(\{x\},U)$ はコンパクト開位相の開基でもある。 □

5.2 成分ごとの連続性

定義 5.3. 集合の間の写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が**成分ごとに連続** (separately continuous) であることとは、次の 2 つが成り立つことである。

1. 各 $a \in X$ について $f(a,-)\colon Y \to Z$ が連続
2. 各 $b \in Y$について $f(-,b)\colon X \to Z$ が連続

$a \in X$ に対して写像 $i_a\colon Y \to X \times Y$を

$$\begin{array}{cccc} i_a\colon & Y & \to & X \times Y \\ & y & \mapsto & (a,y) \end{array}$$

$b \in Y$に対して写像 $j_b\colon X \to X \times Y$を

$$\begin{array}{cccc} j_b\colon & X & \to & X \times Y \\ & x & \mapsto & (x,b) \end{array}$$

により定める。

$i_a,\ j_b$ を使うと、写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が成分ごとに連続であることは

1. 各 $a \in X$ について $f \circ i_a\colon Y \to Z$ が連続
2. 各 $b \in Y$について $f \circ j_b\colon X \to Z$ が連続

であると言い換えられる。

直積 $X \times Y$ の位相（TODO: 位相の名前？）(topology of separate continuity) を次のように定める。部分集合 $U \subset X \times Y$ が開集合であるのは、

1. 任意の $a \in X$ に対し $i_a^{-1}[U] = \{y \in Y \mid (a, y) \in U\}$ が Y の開集合である。
2. 任意の $b \in Y$ に対し $j_b^{-1}[U] = \{x \in X \mid (x, b) \in U\}$ が X の開集合である。

の 2 つを満たすことであると定める。この条件は開集合の条件を満たす。$X \times Y$ にこの位相を入れたものを、$X \otimes Y$ で表すことにする。

別の言い方をすると、$X \otimes Y$ は写像の族

$$\{i_a \colon Y \to X \times Y\}_{a \in X} \cup \{j_b \colon X \to X \times Y\}_{b \in Y}$$

の終位相である。特に、$i_a \colon Y \to X \otimes Y$ および $j_b \colon X \to X \otimes Y$ は連続である。

定理 5.4. X, Y, Z をそれぞれ位相空間とする。（集合としての）写像 $f \colon X \times Y \to Z$ が成分ごとに連続であることと、$f \colon X \otimes Y \to Z$ が連続であることは同値である。

Proof. 終位相の一般論で示せる。具体的には、補題 A.10 の系である。 □

定理 5.5. X, Y, Z を位相空間とする。写像 $f \colon X \otimes Y \to Z$ が連続であることと、

$$\begin{array}{cccc} f^\sharp \colon & X & \to & C_{\mathrm{pt}}(Y, Z) \\ & x & \mapsto & (y \mapsto f(x, y)) \end{array}$$

が連続であることは同値である。

Proof.

■前半 f が連続であれば $f^\sharp$ も連続であることを示す。$C_{\mathrm{pt}}(Y, Z)$ は、$y_0 \in Y$ と Z の開集合 U に対して $W(\{y_0\}, U)$ の形の集合で生成されるので、$(f^\sharp)^{-1}[W(\{y_0\}, U)]$ が X の開集合であることを示せば良い。

$$\begin{aligned} (f^\sharp)^{-1}[W(\{y_0\}, U)] &= \{x \in X \mid f^\sharp(x) \in W(\{y_0\}, U)\} \\ &= \{x \in X \mid f^\sharp(x)(y_0) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid f(x, y_0) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid (f \circ j_{y_0})(x) \in U\} \\ &= (f \circ j_{y_0})^{-1}[U] \end{aligned}$$

であるが、f の連続性より $f \circ j_{y_0} \colon X \to Z$ は連続なので、$(f \circ j_{y_0})^{-1}[U]$ は X の開集合である。

■後半 $f^\sharp$ が連続であれば f も連続であることを示す。そのためには、任意の $a \in X$ について $f \circ i_a$ が連続であることと、任意の $b \in Y$ について $f \circ j_b$ が連続であることを示せば良い。

まず、任意の $a \in X$ について $f \circ i_a$ が連続であることを示す。Z の開集合 U について

$$\begin{aligned} (f \circ i_a)^{-1}[U] &= \{y \in Y \mid f(a, y) \in U\} \\ &= \{y \in Y \mid f^\sharp(a)(y) \in U\} \\ &= f^\sharp(a)^{-1}[U] \end{aligned}$$

であるが、$f^\sharp(a) \colon Y \to Z$ は連続なので、$f^\sharp(a)^{-1}[U]$ は Y の開集合である。よって、$f \circ i_a$ は連続である。

次に、任意の $b \in Y$ について $f \circ j_b$ が連続であることを示す。Z の開集合 U について

$$\begin{aligned}(f \circ j_b)^{-1}[U] &= \{x \in X \mid f(x,b) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid f^\sharp(x)(b) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid f^\sharp(x) \in W(\{b\},U)\} \\ &= (f^\sharp)^{-1}[W(\{b\},U)]\end{aligned}$$

であるが、$f^\sharp$ は連続、$W(\{b\},U)$ は $C_{\mathrm{pt}}(Y,Z)$ の開集合なので、$(f^\sharp)^{-1}[W(\{b\},U)]$ は X の開集合である。よって、$f \circ j_b$ は連続である。 □

命題 5.6 (直積位相との強弱)**.** $X \times Y$ の直積位相に関する開集合は $X \otimes Y$ についての開集合でもある。つまり、直積位相よりも $X \otimes Y$ の方が大きい位相である。

Proof. $i_a\colon Y \to X \times Y$ や $j_b\colon X \to X \times Y$ の終域に直積位相を入れた時、これらは全て連続となる。終位相はこれらが全て連続になる位相の中で最大なので、$X \otimes Y$ の方が大きい位相である。 □

系 5.7. X, Y, Z を位相空間とする。写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が直積位相に関して連続であれば

$$f^\sharp\colon X \to C_{\mathrm{pt}}(Y,Z)$$

は連続である。

また、$f^\sharp\colon X \to C(Y,Z)$ がコンパクト開位相について連続なら、$f\colon X \otimes Y \to Z$ は連続である。

6 一点からなる空間（単位対象）

$\{*\}$ を一点からなる空間とする。

定理 6.1. 次の写像

$$\begin{aligned}&\lambda\colon \{*\} \times X \to X; && (*,x) \mapsto x \\ &\rho\colon X \times \{*\} \to X; && (x,*) \mapsto x\end{aligned}$$

はそれぞれ自然な同相を定める。

Proof. ここでは λ について確認し、ρ については省略する。

λ が全単射であることは明らかである。直積位相の定義より、連続性も明らかである。あとは、λ がそれぞれが開写像であることを確認すれば良い。

一般に、$X \times Y$ の直積位相は X の開集合 U と Y の開集合 V について $U \times Y$ および $X \times V$ によって生成される。$\{*\}$ の空でない開集合は $\{*\}$ だけなので、$\{*\} \times X$ の開集合は X の開集合 U について $\{*\} \times U$ の形の集合で生成される。$\{*\} \times U$ の λ による像は U であり、これは X の開集合である。 □

定理 6.2. 自然な写像

$$i_X\colon X \to C(\{*\},X)$$

はコンパクト開位相および各点収束位相のいずれについても同相となる。

Proof. i_X は明らかに全単射である。

まず、i_X が連続であることを確認する。$C(\{*\}, X)$ の開集合は、X の開集合 U を使って $W(\emptyset, U) = C(\{*\}, X)$ または $W(\{*\}, U)$ と書けることに注意する。

$$\begin{aligned}
i_X^{-1}[W(\{*\}, U)] &= \{x \in X \mid i_X(x) \in W(\{*\}, U)\} \\
&= \{x \in X \mid i_X(x)[\{*\}] \in U\} \\
&= \{x \in X \mid x \in U\} \\
&= U
\end{aligned}$$

より、$i_X^{-1}[W(\{*\}, U)]$ は開集合である。

次に、i_X^{-1} が連続であることを確認する。X の開集合 U について $i_X[U]$ を考える。

$$\begin{aligned}
i_X[U] &= \{f \in C(\{*\}, X) \mid \exists x \in U.\, f = i_X(x)\} \\
&= \{f \in C(\{*\}, X) \mid \exists x \in U.\, f(*) = i_X(x)(*)\} \\
&= \{f \in C(\{*\}, X) \mid \exists x \in U.\, f(*) = x\} \\
&= \{f \in C(\{*\}, X) \mid f(*) \in U\} \\
&= W(\{*\}, U)
\end{aligned}$$

より、$i_X[U]$ は開集合である。よって、i_X^{-1} は連続である。

これで、i_X が同相写像であることがわかった。 □

付録 A　始位相と終位相

開集合系 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ について $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ である時、位相 $\mathcal{O}_1$ は位相 $\mathcal{O}_2$ より**小さい位相** (smaller, weaker, coarser topology) である。位相 $\mathcal{O}_2$ は位相 $\mathcal{O}_1$ より**大きい位相** (larger, stronger, finer topology) である。

離散位相はどんな位相よりも大きく、密着位相はどんな位相よりも小さい。

大きい位相はそこを定義域とする写像が連続になりやすく、小さい位相は連続になりにくい。大きい位相はそこを終域とする写像が連続になりにくく、小さい位相は連続になりやすい。

集合 X と、位相空間の族 $\{Y_i\}_{i \in I}$、および Y_i を終域とする写像の族 $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が与えられたとする。X に離散位相を入れれば f_i は当然連続になるが、それでは面白くない。X に入れる最も「面白い」位相は、f_i が全て連続になるような X の位相の中で最も小さいものであろう。この位相を**始位相** (initial topology) と呼ぶ。

例 A.1 (直積位相)**.** 位相空間 X, Y とその直積 $X \times Y$ を考える。$X \times Y$ の直積位相は、

$$X \leftarrow X \times Y \to Y$$

の始位相である。

例 A.2 (相対位相（部分空間の位相）)**.** 位相空間 Y とその部分集合 X を考える。X の相対位相は、包含写像

$$X \to Y$$

に関する始位相である。

例 A.3 (密着位相)**.** 添字の空間 I は空集合でも良い。この時、X に入る始位相は単に「最も小さい位相」であり、すなわち密着位相である。

命題 A.4 (始位相の構成)**.** 写像の族 $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ に関する始位相は、次の集合族によって生成される：

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I}\{f_i^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{O}(Y_i)\}$$

Proof. $\mathcal{X}$ で生成される位相が f_i を連続にすることと、f_i を連続にする X の位相は全て $\mathcal{X}$ で生成されるものよりも大きいことを示せば良い。

■前半　$i \in I$ を一つ固定して、f_i が連続となることを示す。Y_i の開集合 U の逆像 $f_i^{-1}[U]$ が X の開集合となれば良いが、これは $\mathcal{X}$ の生成元であるので当然開集合である。

■後半　位相 $\mathcal{U}$ について全ての f_i が連続となると仮定する。$\mathcal{X} \subset \mathcal{U}$ を示せば良い。$\mathcal{X}$ の元はある $i \in I$ と Y_i の開集合 U について $f_i^{-1}[U]$ の形をしているが、f_i は $\mathcal{U}$ について連続なので $f_i^{-1}[U]$ は $\mathcal{U}$ の開集合である。 □

補題 A.5. Z を位相空間、$h\colon Z \to X$ を写像とする。X の始位相について $h\colon Z \to X$ が連続であることと、全ての $i \in I$ について $f_i \circ h\colon Z \to Y_i$ が連続であることは同値である。

Proof. X の始位相について $h\colon Z \to X$ が連続になると仮定する。各 f_i は始位相について連続なので、その合成である $f_i \circ h$ も当然連続である。

逆に、全ての $i \in I$ について $f_i \circ h\colon Z \to Y_i$ が連続であると仮定する。X の開集合 U について $h^{-1}[U]$ が Z の開集合であることを確認したいが、U が適当な i と Y_i の開集合 U' について $U = f_i^{-1}[U']$ と書ける場合を考えれば十分である。

$$h^{-1}[U] = h^{-1}[f_i^{-1}[U']] = (f_i \circ h)^{-1}[U']$$

であるが、仮定より $f_i \circ h$ は連続なので $(f_i \circ h)^{-1}[U']$ は開集合である。よって、$h^{-1}[U]$ は開集合で、h が連続であることが示された。 □

X に入る始位相は、X の適当な部分集合の族によって生成される位相だった。逆に、X の部分集合の族 $\mathcal{S} \subset P(X)$ によって生成される位相は、適当な位相空間の族 Y_i と写像の族 $f\colon X \to Y_i$ に関する始位相となる。具体的には、添字集合は $\mathcal{S}$ 自身 $I = \mathcal{S}$, 位相空間は $Y_s = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\})$, f は特性関数

$$\begin{array}{rccc} f_s\colon & X & \to & Y_s \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & x \in s \\ 0 & x \notin s \end{cases} \end{array}$$

とすれば良い。つまり、始位相は「部分集合によって生成される位相」の一般化である。

定義 A.6 (終位相)**.** 集合 Y と、位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$、および X_i を定義域とする写像の族 $\{g_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ が与えられたとする。Y に密着位相を入れれば f_i は当然連続になるが、それでは面白くない。Y に入れる最も「面白い」位相は、g_i が全て連続になるような Y の位相の中で最も大きいものであろう。この位相を**終位相** (final topology) と呼ぶ。

例 A.7 (商位相)**.** X を位相空間、$g\colon X \to Y$ を全射とする。g により定まる Y の商位相は、g による終位相に他ならない。

例 A.8 (離散位相)**.** 添字の空間 I は空集合でも良い。この時、Y に入る終位相は単に「最も大きい位相」であり、すなわち離散位相である。

命題 A.9 (終位相の構成)**.** 写像の族 $\{g_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ に関する終位相は、次のように構成できる：$U \subset Y$が開集合であることは、任意の $i \in I$ に関して $g_i^{-1}[U]$ が X_i の開集合であることと同値である。

Proof. 集合族 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} := \{U \subset Y \mid \forall i \in I.\, g_i^{-1}[U] \in \mathcal{O}(X_i)\}$$

とおく。$\mathcal{U}$ が終位相の性質を満たすことを示したい。

■$\mathcal{U}$ について g_i が全て連続になること $U \in \mathcal{U}$ について $g_i^{-1}[U]$ が開集合になることは、構成から明らかである。

■$\mathcal{U}$ が最も大きいものであること $\mathcal{V}$ を、g_i が全て連続になるような Y の位相の一つとする。$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ を示せば良い。

$V \in \mathcal{V}$ を任意に取る。任意の $i \in I$ について、$g_i\colon X_i \to (V, \mathcal{V})$ は連続なので、$g_i^{-1}[V]$ は X_i の開集合である。よって、$V \in \mathcal{U}$ である。 □

補題 A.10. 位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ および写像の族 $\{g_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ により集合 Y に終位相を入れる。Y から位相空間 Z への写像 $h\colon Y \to Z$ が連続であることと、全ての $i \in I$ について $h \circ g_i\colon X_i \to Z$ が連続であることは同値である。

Proof. まず、h が連続なら $h \circ g_i$ が連続であることについて。g_i は Y の終位相について連続なので、合成 $h \circ g_i$ も連続である。

次に、全ての $i \in I$ について $h \circ g_i$ が連続なら h が連続であることを示す。任意に取った Z の開集合 V について $h^{-1}[V]$ が Y の開集合であることを示せば良い。仮定より、任意の $i \in I$ について $(h \circ g_i)^{-1}[V] = g_i^{-1}[h^{-1}[V]]$ はそれぞれ X_i の開集合である。終位相の定義より、$h^{-1}[V]$ は Y の開集合である。 □

参考文献

[1] N. Bourbaki. *General Topology. Chapters 5-10*. Herrman, 1966.

[2] John L. Kelley. *General Topology*. 1955.

[3] 内田 伏一. **集合と位相**. 裳華房.