連分数についてのメモ

@mod_poppo

2022 年 7 月 18 日

1　連分数の基本事項

$\{a_i\}$ を非負整数の列であって、$i \geq 1$ に対して $a_i \geq 1$ を満たすものとする。
有理関数の列 $\{f_k\}$ を

$$f_k(t) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_k + t}}}$$

とおく。漸化式で書けば

$$\begin{aligned} f_0(t) &= a_0 + t, \\ f_{k+1}(t) &= f_k\left(\frac{1}{a_{k+1} + t}\right) \end{aligned}$$

となる。

整数列 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ を、初項

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & q_0 &= 0, \\ p_1 &= a_0, & q_1 &= 1 \end{aligned}$$

および漸化式

$$\begin{aligned} p_{k+2} &= a_{k+1}p_{k+1} + p_k, \\ q_{k+2} &= a_{k+1}q_{k+1} + q_k \end{aligned}$$

によって定める。行列で書けば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_0 & p_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} q_{k+2} & p_{k+2} \\ q_{k+1} & p_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{k+1} & p_{k+1} \\ q_k & p_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

定理 1. $\{f_k\}$ と $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ の間に次の関係が成り立つ：

$$f_k(t) = \frac{p_{k+1} + p_k t}{q_{k+1} + q_k t}.$$

Proof. $k=0$ の時は明らか。

$k=k'+1$ の時、

$$\begin{aligned}
f_{k'+1}(t) &= f_{k'}\left(\frac{1}{a_{k'+1}+t}\right) \\
&= \frac{p_{k'+1}+p_{k'}\frac{1}{a_{k'+1}+t}}{q_{k'+1}+q_{k'}\frac{1}{a_{k'+1}+t}} \\
&= \frac{(a_{k'+1}+t)p_{k'+1}+p_{k'}}{(a_{k'+1}+t)q_{k'+1}+q_{k'}} \\
&= \frac{a_{k'+1}p_{k'+1}+p_{k'}+p_{k'+1}t}{a_{k'+1}q_{k'+1}+q_{k'}+q_{k'+1}t} \\
&= \frac{p_{k'+2}+p_{k'+1}t}{q_{k'+2}+q_{k'+1}t}
\end{aligned}$$

より成り立つ。 □

有理数列 $\{r_k\}$ を $r_k := f_k(0)$ により定める。

$$r_k = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{\cdots+\frac{1}{a_k}}}$$

である。定理 1 より、

$$r_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \tag{1}$$

である。

定理 2. $k \geq 0$ について

$$q_{k+1}p_k - p_{k+1}q_k = (-1)^k$$

である。

Proof. $k=0$ の場合は

$$q_1p_0 - p_1q_0 = 1\cdot 1 - a_0\cdot 0 = 1 = (-1)^0$$

より成り立つ。

$k=k'+1$ の場合は

$$\begin{aligned}
q_{k'+2}p_{k'+1} - p_{k'+2}q_{k'+1} &= (a_{k'+1}q_{k'+1}+q_{k'})p_{k'+1} - (a_{k'+1}p_{k'+1}+p_{k'})q_{k'+1} \\
&= q_{k'}p_{k'+1} - p_{k'}q_{k'+1} \\
&= -(-1)^{k'} \\
&= (-1)^{k'+1}
\end{aligned}$$

より成り立つ。 □

定理 2 は行列を使った漸化式と行列式の性質から明らか、とも言える。

系 3. p_k と q_k は互いに素である。特に、(1) は既約分数である。

定理 4.

$$r_{k+1} - r_k = \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_{k+2}}$$

が成り立つ。

Proof.

$$\begin{aligned} r_{k+1} - r_k &= \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \\ &= \frac{p_{k+2}q_{k+1} - p_{k+1}q_{k+2}}{q_{k+2}q_{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_{k+2}} \end{aligned}$$

より成り立つ。 □

系 5.

$$|r_{k+1} - r_k| = \frac{1}{q_{k+1}q_{k+2}} < \frac{1}{q_{k+1}^2}$$

が成り立つ。

2　有理数の連分数展開

$\frac{p}{q}$ を非負の既約分数（$p \geq 0$, $q \geq 1$, $\gcd(p, q) = 1$）とする。非負整数列 $\{a_k\}$ を次のアルゴリズム（ユークリッドの互除法）により定める：

1. $u_0 := p$, $u_1 := q$ とおく。$k \leftarrow 0$ とおく。
2. 以下を繰り返す：
   (a) u_k を u_{k+1} で割った商を a_k, 余りを u_{k+2} とおく：

   $$u_k = a_k u_{k+1} + u_{k+2} \quad (0 \leq u_{k+2} < u_{k+1})$$

   (b) $u_{k+2} = 0$ であれば繰り返しを終了する。
   (c) そうでなければ $k \leftarrow k + 1$ として続行する。
3. $n := k$ とおく。数列 $a_0, \ldots, a_n$ および $u_0, \ldots, u_{n+1}, u_{n+2} = 0$ を出力とする。

補題 6. 上記のアルゴリズムは停止する。

Proof. 降下列 $u_1 > u_2 > \cdots > u_{k+1} > u_{k+2} > \cdots$ はどこかで 0 に到達する。 □

ユークリッドの互除法の性質より u_{n+1} は $u_0 = p$ および $u_1 = q$ の最大公約数で、仮定よりこれは 1 である。

得られた数列 $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$ から § 1 の $\{f_k\}_{0 \leq k \leq n}$ および $\{p_k\}_{0 \leq k \leq n+1}$, $\{q_k\}_{0 \leq k \leq n+1}$, $\{r_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を構成する。

定理 7. $0 \leq k \leq n$ について

$$f_k\left(\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}\right) = \frac{p}{q}$$

が成り立つ。

Proof. $k=0$ の場合は容易に確かめられる。

$k=k'+1$ の場合は

$$\begin{aligned} f_{k'+1}\left(\frac{u_{k'+3}}{u_{k'+2}}\right) &= f_{k'}\left(\frac{1}{a_{k'+1}+\frac{u_{k'+3}}{u_{k'+2}}}\right) \\ &= f_{k'}\left(\frac{u_{k'+2}}{a_{k'+1}u_{k'+2}+u_{k'+3}}\right) \\ &= f_{k'}\left(\frac{u_{k'+2}}{u_{k'+1}}\right) \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

よりわかる。 □

系 8. $r_n = \frac{p}{q}$ である。